

**PROBLEMI ATTUALI E PROSPETTIVE
NELL'INGEGNERIA DELLE STRUTTURE**
Convegno in onore di FRANCO MACERI
26-27 Settembre, 2013 – Maratea (PZ)

**SULL'ANALISI LIMITE DI PANNELLI IN
MURATURA FIBRORINFORZATI**

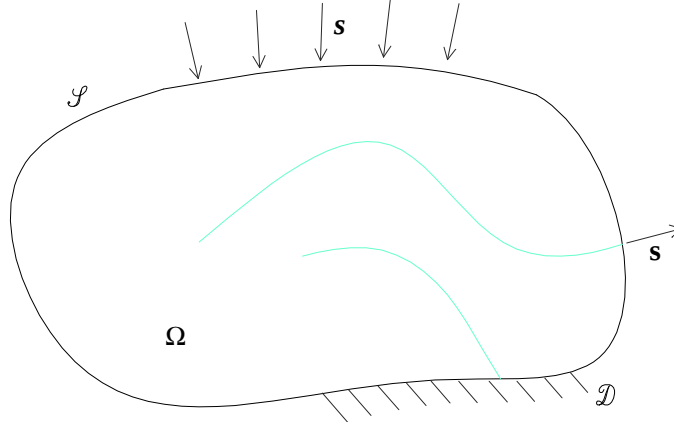
M. Lucchesi¹, M. Šilhavý², N. Zani¹

¹Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale,
Universita' di Firenze,
Piazza Brunelleschi 6,
50121 Firenze
Italia

²Institute of Mathematics of the AV CR
Žitná 25
115 67 Prague 1
Czech Republic

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un corpo rinforzato con fibre. Le fibre sono schematizzate come una famiglia $\mathcal{F}$ di curve regolari che non si intersecano.

Indicati con $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}$ gli stati di sforzo, con $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}$ le forze di massa, $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s}$ i carichi esterni di superficie, agenti sul corpo e nella fibra, rispettivamente,



il sistema di forze applicate e' in equilibrio se soddisfa l'equazione dei lavori virtuali:

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u} \, d\mathcal{L}^2 + \int_{\mathcal{F}} \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u} \, d\mathcal{H}^1 =$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\mathcal{L}^2 + \int_{\mathcal{F}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\mathcal{H}^1 + \int_S \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} \, d\mathcal{H}^1 + \sum_{S \cap \partial \mathcal{F}} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}$$

per ogni $\mathbf{u} \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2) : \mathbf{u}|_D = \mathbf{0}$.

Facciamo l'ipotesi che la matrice del composito sia costituita da materiale non resistente a trazione e la fibra da materiale elastico lineare.

Analisi limite

Uno stato di sforzo per il composito e' costituito da una coppia $(\mathbf{T}, \mathbf{T})$ che diremo *ammissibile* se

- $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T} (N\mathbf{t} \otimes \mathbf{t})$ sono funzioni a quadrato sommabile;

- $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \leq 0$ quasi per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ e $N \geq 0$ quasi per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$

e *equilibrato* con i carichi se soddisfa il teorema dei lavori virtuali.

Diremo che i carichi sono *compatibili* se esiste uno stato di sforzo $(\mathbf{T}, \mathbf{T})$ ammissibile che li equilibra.

Siano

$$f(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{T}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \quad \text{e} \quad f(\epsilon) = \frac{1}{2} N(\epsilon) \epsilon$$

la densita' di energia di deformazione della matrice e della fibra. Indichiamo con

$$E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} f d\mathcal{L}^2 + \int_{\mathcal{F}} f d\mathcal{H}^1$$

l'energia di deformazione, con

$$W(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\mathcal{L}^2 + \int_{\mathcal{F}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\mathcal{H}^1 + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} \, d\mathcal{H}^1 \\ + \sum_{S \cap \partial \mathcal{F}} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}$$

il lavoro dei carichi e con

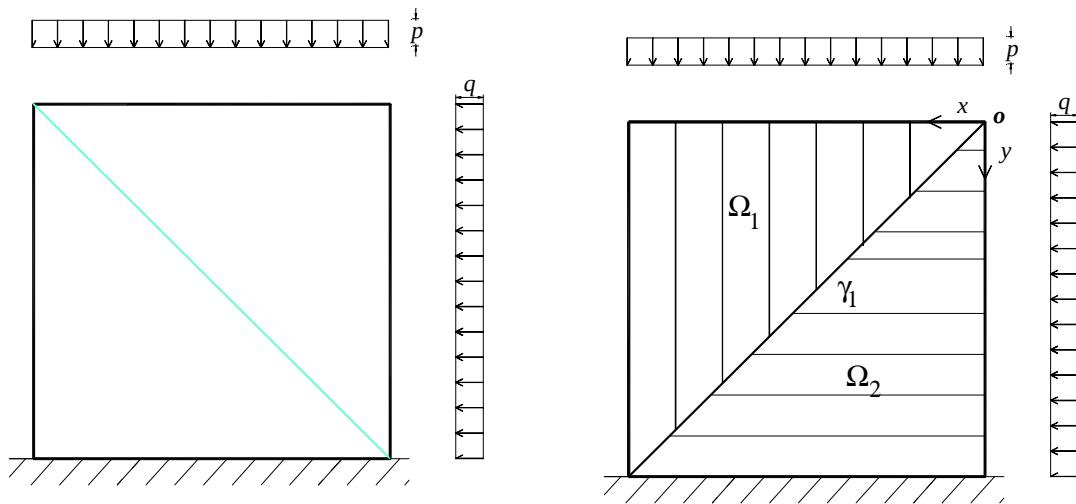
$$F(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})$$

l'energia potenziale totale del composito.

Sotto opportune ipotesi si dimostra che il funzionale dell'energia potenziale è limitato inferiormente se e solo se i carichi sono compatibili.

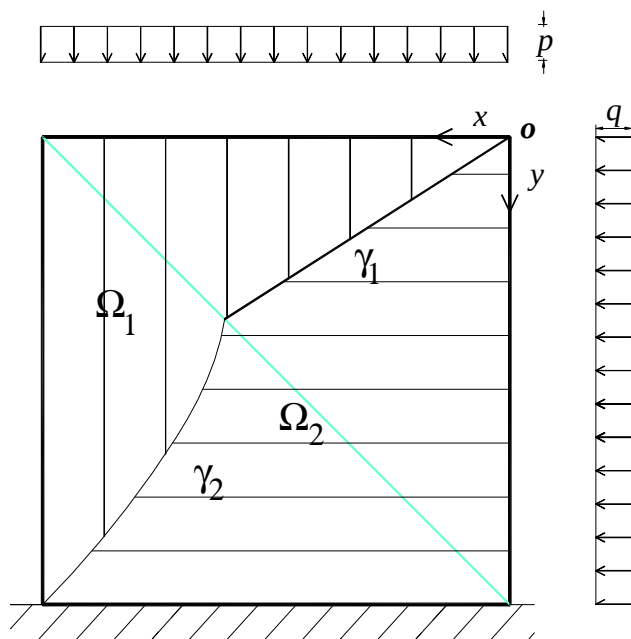
A direct approach to fiber and membrane reinforced bodies. Part I. Stress concentrated on curves for modelling fiber reinforced materials. *Continuum mechanics and thermodynamics* **25**, 537-558 (2013).

A direct approach to fiber and membrane reinforced bodies. Part II. Membrane reinforced bodies. *Continuum mechanics and thermodynamics* (in press).



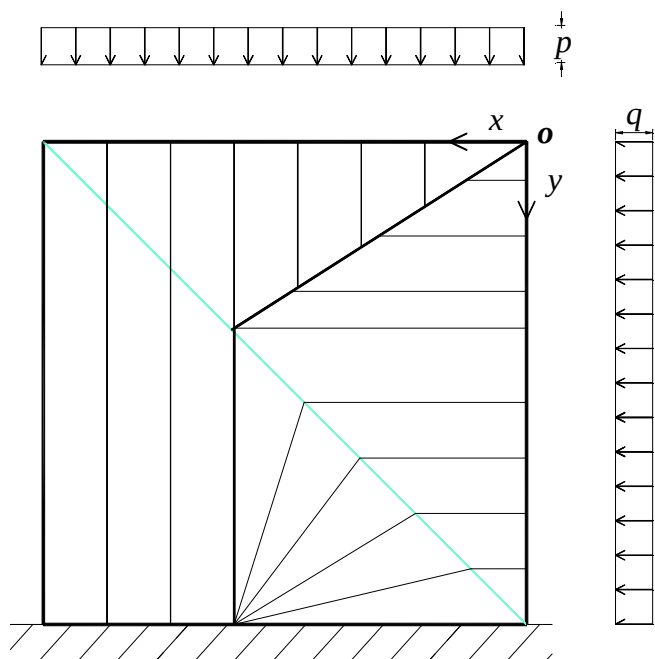
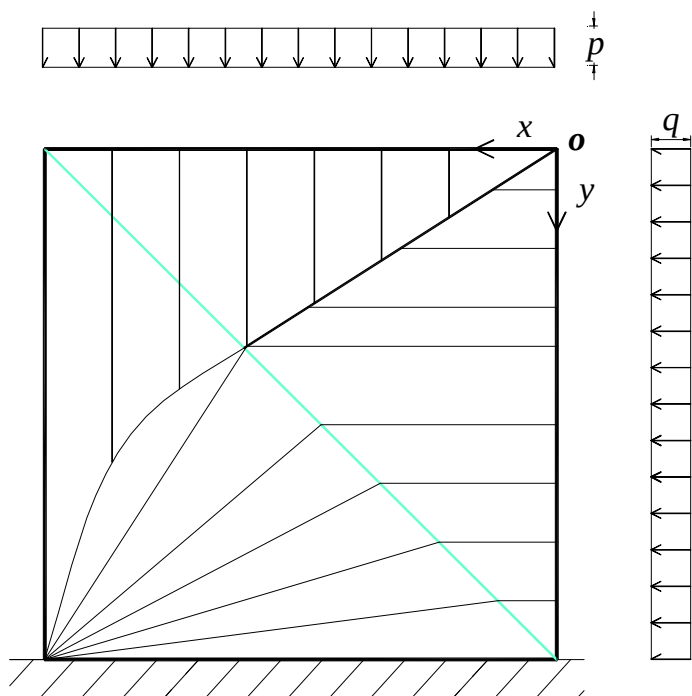
$$\mathbf{T}_r = \begin{cases} p\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \text{in } \Omega_1 \\ q\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 & \text{in } \Omega_2 \end{cases} \quad \text{in } \Omega/\gamma.$$

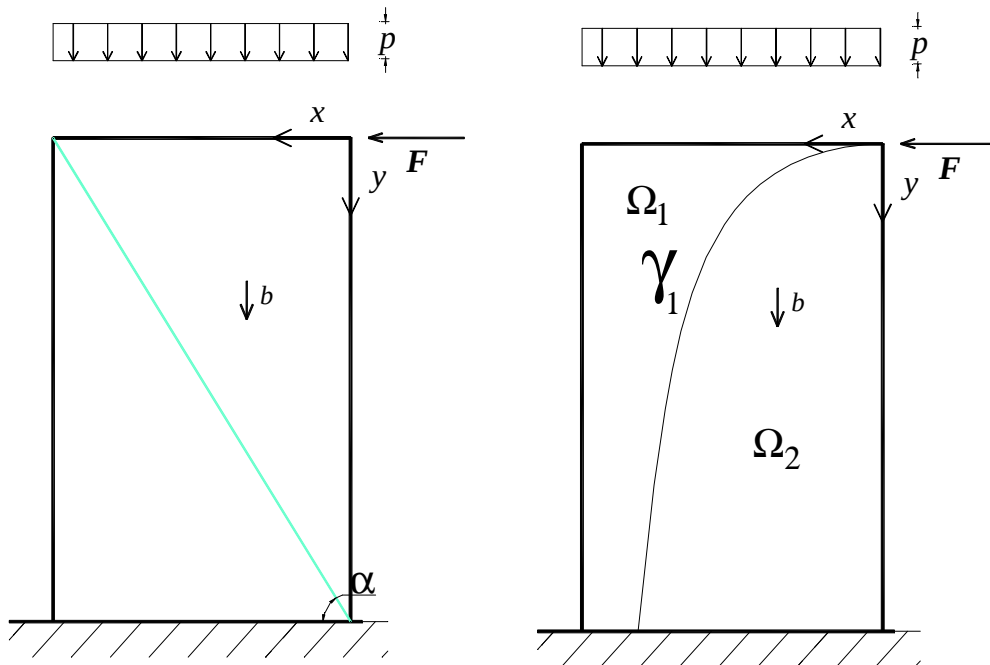
$$s_1(x) = x\sqrt{p(p+q)}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{p}{q}}x$$



$$s_2(x) = \sqrt{px^2(p+q) + \sqrt{2}N(p+q)x + N(N - \sqrt{2}ql)}$$

$$\omega_2 = N + \frac{\sqrt{2}}{2q} \sqrt{2pqx^2 + 2\sqrt{2}Nqx + N(N - \sqrt{2}ql)}$$



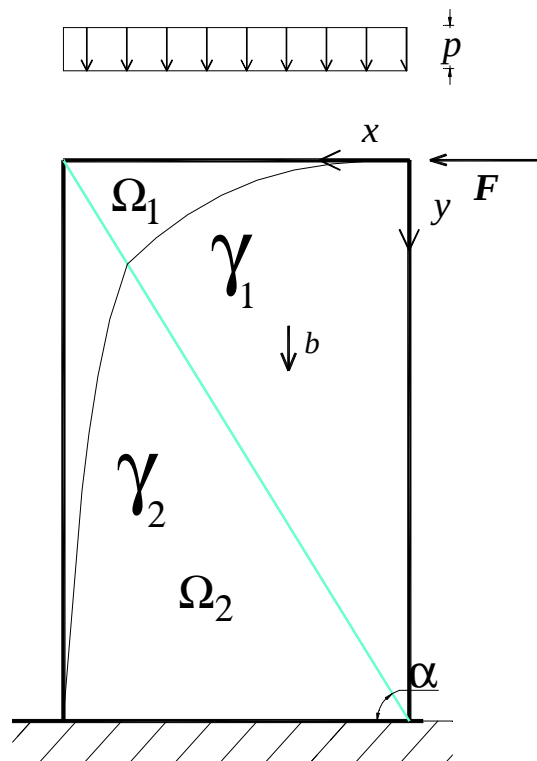


$$\mathbf{T}_r = \begin{cases} (-by - p)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \text{in } \Omega_1 \\ b(\omega(x) - y)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

$$\omega_1'' - \frac{b}{F}\omega_1 = -\frac{p}{F}, \omega_1(0) = 0, \omega_1'(0) = F$$

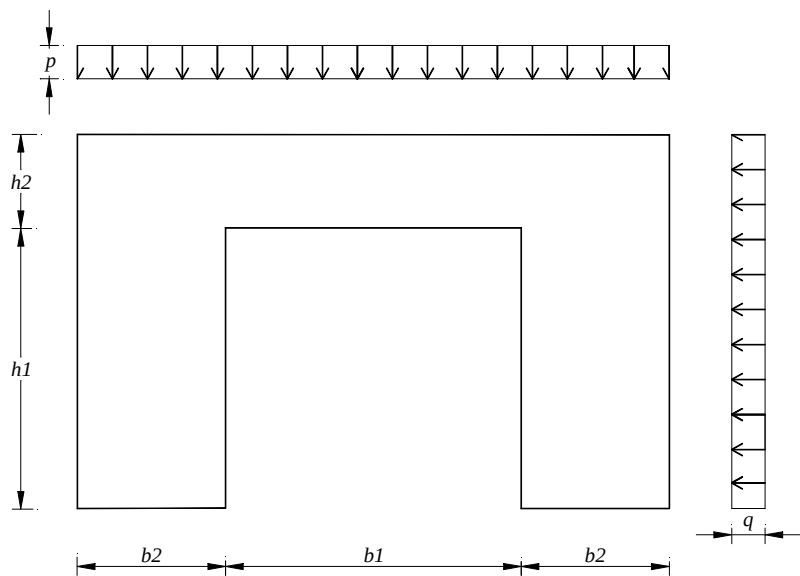
$$s_1(x) = \sqrt{F^2 + \frac{Fp^2}{2b} \left(\cosh\left(2\sqrt{\frac{b}{f}}x\right) - 1 \right)},$$

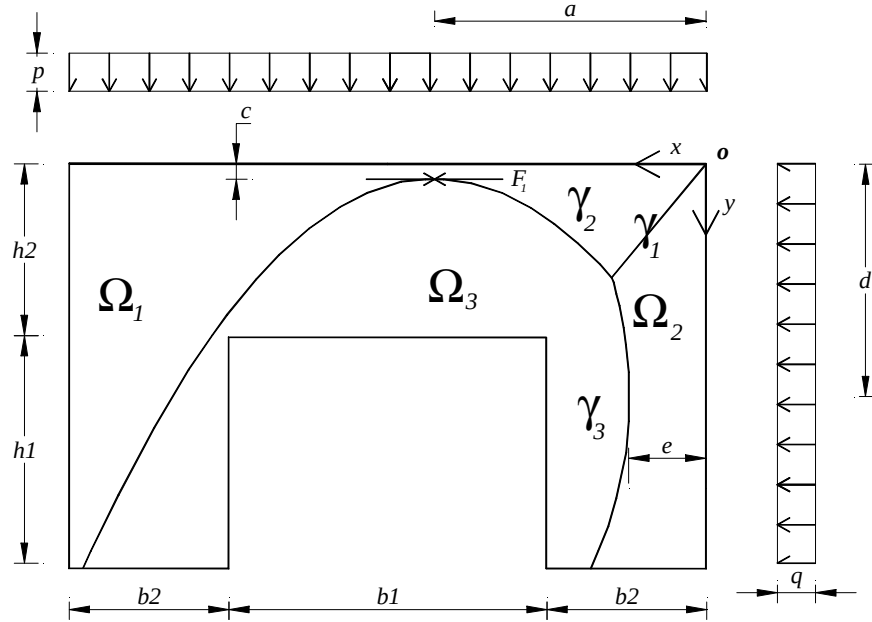
$$\omega_1 = \frac{p}{2b} \left(\sinh\left(\sqrt{\frac{b}{f}}x\right) - 1 \right).$$



$$\omega_2'' - \frac{b}{F - N \cos \alpha} \omega_2 = - \frac{p}{F - N \cos \alpha},$$

$$\omega(x_0) = y_0, \omega'(x_0) = \frac{px_0 + b \int_0^{x_0} \omega_1 dx + N \sin \alpha}{F - N \cos \alpha}$$





Uno stato di sforzo equilibrato e compatibile e' dato da:

$$\mathbf{T}_r = \begin{cases} p\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \text{in } \Omega_1 \\ q\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 & \text{in } \Omega_2 \\ \mathbf{0} & \text{in } \Omega_3 \end{cases} \quad \text{in } \Omega/\gamma$$

$$s_1(x) = x\sqrt{p(p+q)}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{p}{q}}x$$

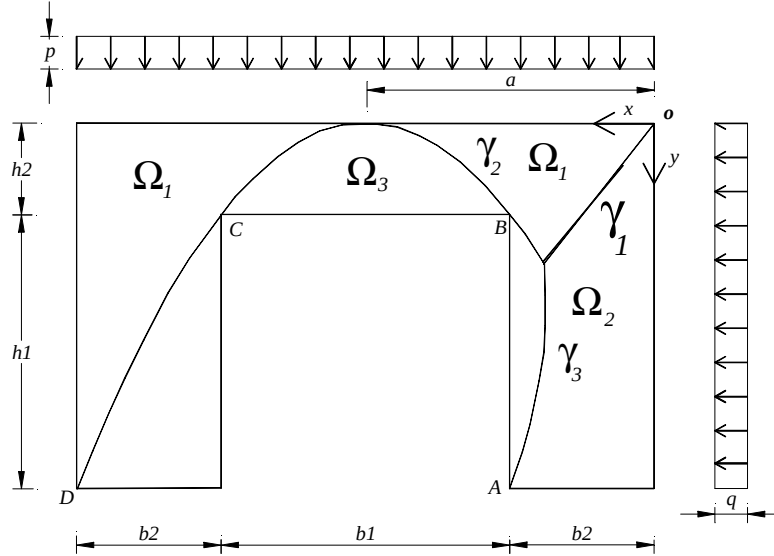
$$s_2(x) = \sqrt{F^2 + p^2(x+a)^2},$$

$$\omega_2 = \frac{p}{2F}x^2 - \frac{ap}{F}x + \frac{2Fc+a^2p}{2F}$$

$$s_3(x) = \sqrt{2apqx + F^2 - 2cFq + a^2p(p-q)},$$

$$\omega_3 = \frac{F}{q} - \frac{1}{q}\sqrt{2apqx + F^2 - 2cFq - a^2pq}$$

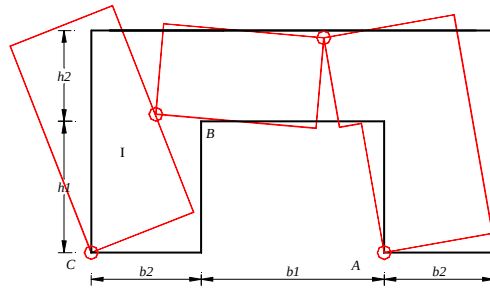
Mantenendo p costante, si incrementa il valore del carico q fino al collasso q_c . Si ha, detti $h = h_1 + h_2$ e $b = b_1 + 2b_2$



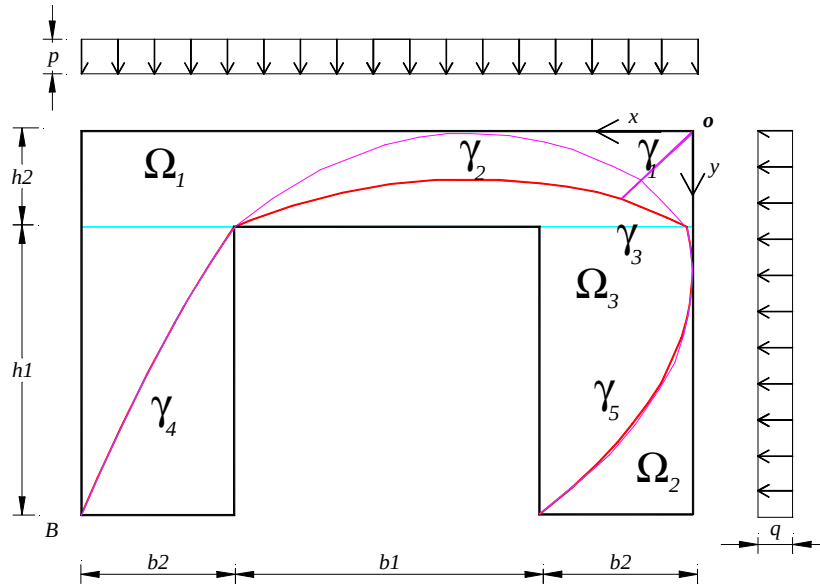
$$a = \frac{b_1 h_1 - b_2 (\sqrt{h h_2} - h_1 + h_2)}{h_1}, \quad F = \frac{p b_2^2 (\sqrt{h} + \sqrt{h_2})^2}{2 h_1^2},$$

$$q_c = \frac{b_1^2 h_1 - 2 b_1 b_2 \sqrt{h_2} (\sqrt{h} + \sqrt{h_2}) - 2 b_2^2 \sqrt{h} (\sqrt{h} + \sqrt{h_2})}{h_1 h^2} p.$$

Per $\frac{h_1}{h_2} = 3$, $\frac{b_1}{b_2} = 2$, si ha $\frac{q_c}{p} = 1$.



Stresses represented by measures in the theory of masonry bodies. *III Canadian Conf. Of nonlinear solids mechanics*, Toronto, 25-29 giugno 2008, Canada



Analogamente al caso precedente, uno stato di sforzo equilibrato e compatibile e' dato da

$$\mathbf{T}_r = \begin{cases} p\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \text{in } \Omega_1 \\ q\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 & \text{in } \Omega_2 \\ \mathbf{0} & \text{in } \Omega_3 \end{cases} \quad \text{in } \Omega/\gamma$$

con la presenza di 5 curve di singolarita'

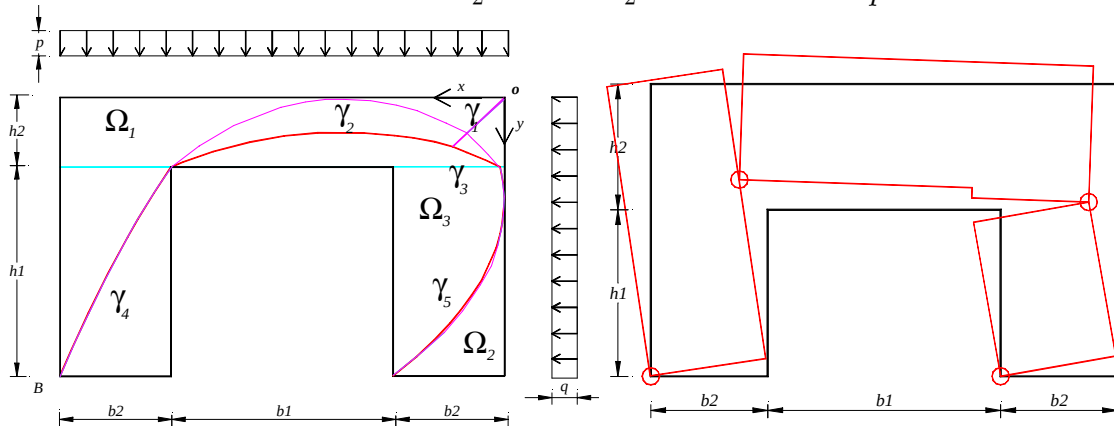
$$s_4(x) = \sqrt{(F - N)^2 + p^2(x + a)^2},$$

$$\omega_4 = \frac{p}{2(F-N)}x^2 - \frac{ap}{N-F}x + \frac{2N(c-h_2)+a^2p}{2(F-N)} + c$$

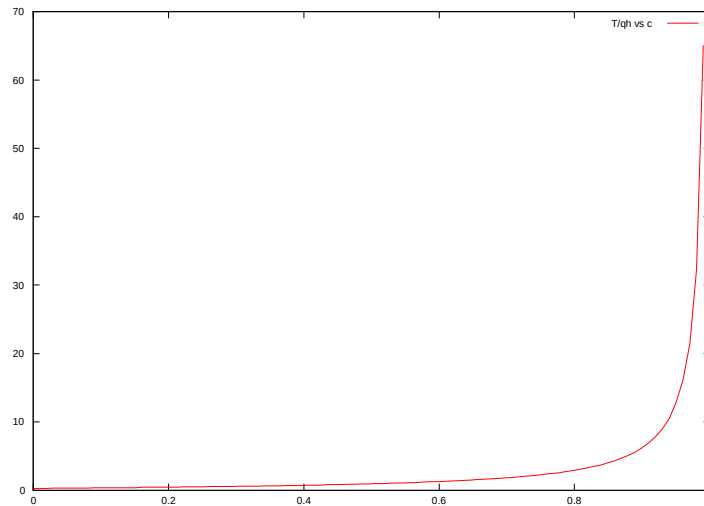
$$s_5(x) = \sqrt{2apqx + F^2 - 2F(N + cq) + N^2 + 2Nqh_2 + a^2p(p - q)},$$

$$\omega_5 = \frac{F-N}{q} - \frac{1}{q} \sqrt{2apqx + F^2 - 2F(N + cq) + N^2 + 2Nqh_2 - a^2pq}.$$

Mantenendo p costante, si incrementa il valore del carico q fino al collasso q_c . Per $\frac{h_1}{h_2} = 3$, $\frac{b_1}{b_2} = 2$, si ha $\frac{q_c}{p} = 1.837$.



La soluzione e' nota a meno di un parametro. In figura si plotta il valore della forza normale sulla fibra in funzione del parametro.



$$\frac{N_{\min}}{qh} = 0.287.$$